

轻质高刚度超结构超低频带隙机理及设计方法

李锁斌¹, 蔡熠玮¹, 王航¹, 李姮媛¹, 李瑞²

(1. 西安石油大学机械工程学院, 710065, 西安; 2. 西安交通大学机械工程学院, 710049, 西安)

摘要: 针对轻质高刚度超结构/超材料中难以实现 10 Hz 以内的超低频振动带隙问题,提出了一种基于轻质高刚度超低频一体化振子的轻质高刚度超结构超低频带隙设计新思路与方法。在不改变轻质高刚度振子实际质量和刚度的基础上,通过同时放大振子的动态质量和降低动态刚度,构造具有超低频特性的轻质高刚度一体化振子,将其引入夹芯结构创造出了一种兼具轻质、高刚度和超低频带隙特性的新型超结构。结果表明:将所设计的轻质高刚度超低频一体化振子引入夹芯结构板后,振子机构的主模态振型使其动态质量被放大的同时其动态刚度降低,致使结构带隙的打开频率降低至 5.5 Hz,较传统结构降低了约 72%,且该新型结构在整个超低频、低频范围内具有良好的振动衰减特性;轻质高刚度超低频振子中,负刚度元件的高度、厚度、跨度以及杠杆臂长比是影响带隙和振动传输特性的关键因素,通过微调可以实现目标带隙的位置、带宽和振动传输特性的精准调控。提出的轻质高刚度超结构超低频带隙机理与设计方法解决了传统超结构设计中超低频带隙与结构轻质高刚度不可兼容的问题,所设计的超结构可兼具轻质、承载和超低频带隙特性,可为实现轻量化的工程结构功能一体化超低频减振目标提供一种新方法。

关键词: 超结构;超材料;振动带隙;超低频减振;夹芯结构;轻量化

中图分类号: TH113.1 **文献标志码:** A

DOI: 10.7652/xjtuxb202509008 **文章编号:** 0253-987X(2025)09-0077-11

Mechanism and Design Methodology for Ultra-Low Frequency Bandgaps in Lightweight High-Stiffness Metastructures

LI Suobin¹, CAI Yiwei¹, WANG Hang¹, LI Hengyuan¹, LI Rui²

(1. School of Mechanical Engineering, Xi'an Shiyou University, Xi'an 710065, China;

2. School of Mechanical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: To address the challenge of achieving ultra-low frequency vibration bandgaps below 10 Hz in lightweight high-stiffness metastructures/metamaterials, a new idea and method for designing ultra-low frequency bandgaps in lightweight high-stiffness metastructures is proposed based on lightweight high-stiffness ultra-low frequency integrated resonators. By simultaneously increasing the dynamic mass and reducing the dynamic stiffness of the resonator without altering its actual mass and stiffness, a lightweight high-stiffness integrated resonator with ultra-low frequency characteristics is created. This resonator is incorporated into a sandwich metastructure, resulting in a novel metastructure that combines lightweight, high-stiffness, and ultra-low frequency bandgap characteristics. The results demonstrate that when the designed lightweight high-stiffness ultra-low

frequency integrated resonator is introduced into the sandwich metastructure plate, the main modal shape of the resonator mechanism amplifies its dynamic mass while decreasing its dynamic stiffness. This leads to a reduction in the opening frequency of the bandgap to 5.5 Hz, approximately 72% lower than that of conventional structures, and the new structure exhibits excellent vibration attenuation characteristics across the entire ultra-low and low-frequency range. In the lightweight high-stiffness ultra-low frequency resonator, the height, thickness, span of the negative stiffness components, and the length ratio of the lever arm are key factors influencing the bandgap and vibration transmission characteristics. Fine-tuning these parameters allows for precise control of the target bandgap position, bandwidth, and vibration transmission characteristics. The proposed mechanism and design method for ultra-low frequency bandgaps in lightweight high-stiffness metastructures address the incompatibility between ultra-low frequency bandgaps and the lightweight high-stiffness demands in traditional metastructure designs. The designed metastructure offers a new method for achieving integrated ultra-low frequency vibration reduction goals in lightweight engineering structures while maintaining lightweight, load-bearing, and ultra-low frequency bandgap features.

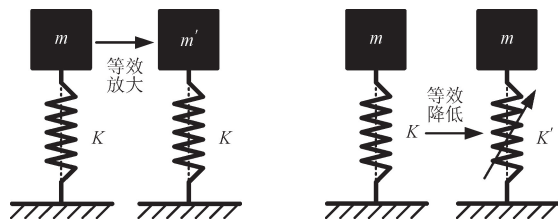
Keywords: metastructures; metamaterials; vibration bandgap; ultra-low frequency vibration attenuation; sandwich structure; lightweight

超结构作为一种新的人工智能结构概念,已发展成为一个具有重要工程应用价值和广泛应用前景的前沿科学领域。通过对超结构进行设计,使其在动态响应时自身可获得良好的低频隔振性能(振动带隙特性,即当弹性波通过时,特定频率范围的振动会被抑制)且有望兼具足够的承载刚度,可为实现轻量化的工程结构功能一体化低频减振目标提供一种新方法^[1-4]。

2000年,Liu等^[5]提出了基于局域共振原理的超结构概念,通过在基体结构中周期性附加局域共振单元(局域振子)形成一种具有弹性波带隙特性的新型结构。由于局域共振型超结构打破了传统带隙结构对晶格常数的依赖,可利用小尺度的周期结构在较低频率范围内开启带隙,因此被广泛研究应用于工程结构低频减振中。然而,带隙的位置仅与局域振子的固有频率相关,致使采用超结构——结构-功能一体化技术进行工程低频减振时需降低结构刚度或增大结构质量,进而造成结构承载能力减弱或者结构质量增大。

如图1(a)和(b)左侧所示的轻质高刚度振子(弹簧-质量等效模型 $m-K$,具有轻质 m 和高刚度 K),却不具备低频特性。为此,文献^[6-15]将具有惯性放大作用的新型机械元件引入到局域共振超结构的设计中,在不增加结构实际质量 m 的基础上使结构动态等效质量增大,原理如图1(a)所示,通过

惯性放大作用使其动态等效质量放大为 m' ,但其实际质量仍为 m ,保证结构轻量化的同时获得了一定范围的低频带隙。与此同时,文献^[16-24]等将传统振动控制领域的负刚度概念引入到局域共振超结构的设计中,通过将负刚度元件与正刚度元件组合,使系统在平衡位置附近的总刚度趋近并且大于0,在不降低结构实际刚度 K 的基础上使结构动态等效刚度降低,原理如图1(b)所示,图中斜箭头表示可变刚度,通过正负刚度相消使其动态等效刚度降低为 K' ,但其实际刚度仍为 K ,保证结构高刚度的同时也获得了一定范围的低频带隙。



(a)大动态质量振子转换机制 (b)低动态刚度振子转换机制

图1 局域振子原理等效模型

Fig. 1 Equivalent model of the local oscillator principle

尽管引入惯性放大或负刚度原理设计的超结构在形成低频振动带隙方面效果显著,但仅凭单独放大动态质量或降低动态刚度的方法对带隙打开位置的降低效果仍然有限,同时由于采用负刚度在获得低频带隙时需要通过额外施加预位移来实现,致使

无法达到结构功能一体化目标,因此进一步限制了其在工程结构低频减振中的应用,致使轻质高刚度超结构目前还无法在 10 Hz 以内的超低频范围形成带隙。

解决轻质高刚度超结构在 10 Hz 以内无法产生超低频带隙的问题,实现其在超低频范围内的振动控制,是目前工程低频振动控制领域里急需突破的一项关键难题,而破解这一难题的关键是打破现有关于轻质高刚度结构只具备高频特性的理论制约^[25],设法使轻质高刚度振子具有超低频特性。

为此,本文提出一种设想:在不增大结构质量和减弱结构刚度的情况下,即保证结构具有轻质高刚度特性的同时,通过增大结构动态等效质量和降低结构动态等效刚度的途径,实现其超低频特性,进而获得超低频带隙。基于以上设想,本文在不改变轻质高刚度振子实际质量和刚度的基础上,通过同时放大振子的动态质量和降低动态刚度,构造具有超低频特性的轻质高刚度一体化振子,并将其引入夹芯超结构^[26],提出一种兼具轻质、高刚度承载性和超低频带隙特性的新型超结构。

1 轻质高刚度振子超低频机理模型

轻质高刚度一体化振子超低频特性形成过程机制模型见图 2,其中 F 为外界激励力, v_1 和 v_2 分别为杠杆左、右两端的位移幅值, l_1 和 l_2 分别为杠杆左、右两端至支撑点的距离,且 $l_2 > l_1$, K_{QZS} 为刚度相消单元的等效刚度, b 为水平斜弹簧在静平衡位置处被压缩后的长度, K_n 为水平斜弹簧的刚度。图 2(c) 为本文提出的一种轻质高刚度振子实现超低频特性的机理模型,该模型不仅通过杠杆原理放大了振子的动态质量,而且通过杠杆摆动触发所形成的刚度相消机制降低了振子的动态刚度,进而将图 2(a) 所示的轻质高刚度高频振子转化为如图 2(b) 所示的轻质高刚度超低频振子,致使轻质高刚度振子实现了超低频特性。

图 2(c) 所示的机理模型中,机构由 m 与 K_{QZS} 通过杠杆(假设为无质量刚性杆)连接而成,机构中仅考虑沿垂直方向 v 的运动,当杠杆右端的小质量 m 受到横向激励时,发生位移幅值为 v_2 的运动,扰动杠杆绕铰链发生摆动,使得杠杆左端撬动单元 K_{QZS} 发生变形,其压缩幅值为 v_1 ,该过程如图 2(e) 所示。

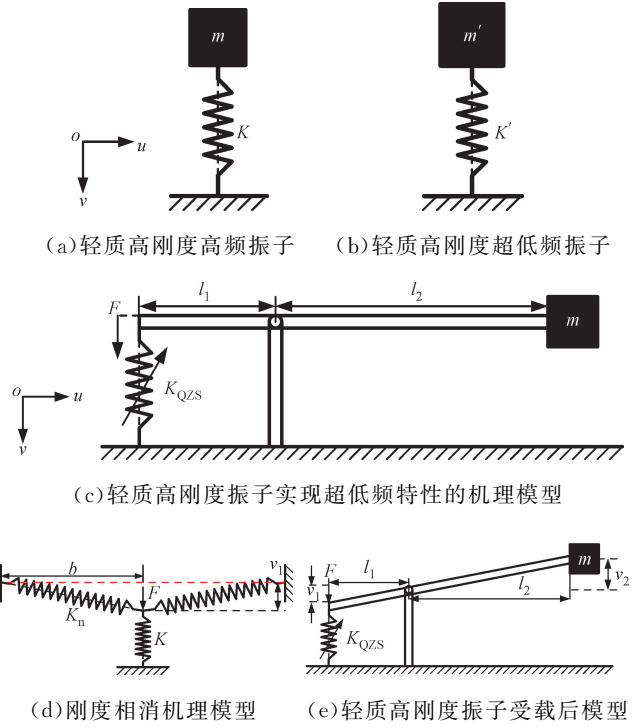


图 2 轻质高刚度一体化振子超低频特性形成过程机制模型
Fig. 2 Mechanism modelling of the formation process of ultra-low frequency characteristics of lightweight, high-stiffness oscillators

对图 2(c) 进行动力学建模,通过分析可得

$$\begin{cases} v_1 l_2 = v_2 l_1 \\ T = \frac{1}{2} m \dot{v}_2^2 \\ U = \frac{1}{2} K_{QZS} v_1^2 \\ L = T - U, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{v}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial v_1} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中: T 为系统动能; U 为系统弹性势能; L 为拉格朗日函数。

由式(1)可得机理模型的动力学方程为

$$(l_2/l_1)^2 m \ddot{v}_1 + K_{QZS} v_1 = 0 \quad (2)$$

对于式(2),令 $m' = (l_2/l_1)^2 m$, 由于 $l_2 > l_1$, 可以看出,与图 2(a) 所示轻质高刚度“高频”振子相比,通过图 2(c) 所示的机理模型转化,实际小质量 m 被放大成为动态等效大质量 m' , 其放大系数为 $(l_2/l_1)^2$ 。

图 2(c) 中 K_{QZS} 依靠正负刚度相消机制实现动态等效刚度降低,其原理见图 2(d) 所示的三弹簧机构,该机构主要由两根充当负刚度的水平斜弹簧和一根充当正刚度的垂直弹簧(也即振子主刚度)组成,当机构受到杠杆左端施加的作用力 F 时,将从图 2(d) 中红

色虚线表示的静平衡位置移动至图 2(d) 中黑色虚线所示位置,此时垂直弹簧 K 被压缩,其恢复力方向与作用力 F 相反,且随位移增大而增大,表现出正刚度特性;同时,由于两根对称斜弹簧在静平衡位置处具有最大压缩量,当结构移动至黑色虚线位置时,斜弹簧的压缩量减小,其恢复力在垂直方向上的分力与作用力 F 同向,且随位移增大而减小,表现出负刚度特性。设斜弹簧的原长为 l_3 ,通过受力分析可得

$$F = \left[K - 2K_n \left(\frac{l_3}{\sqrt{b^2 + v_1^2}} - 1 \right) \right] v_1 \quad (3)$$

引入无量纲常数

$$\begin{cases} f = F/Kl_3 \\ v'_1 = v_1/l_3 \\ \gamma = K_n/K \\ \beta = b/l_3 \end{cases} \quad (4)$$

将式(4)代入式(3),可得该机构的无量纲恢复力为

$$f = \left[1 - 2\gamma \left(\frac{1}{\sqrt{\beta^2 + v_1'^2}} - 1 \right) \right] v'_1 \quad (5)$$

在式(5)中引入 $\lambda (0 \leq \lambda < 1)$,用于表征机构刚度单元 K_{QZS} 与振子主刚度 K 的比值,其反映正刚度被负刚度抵消后所剩余的等效正刚度^[17]。基于此,推导出

$$f(v'_1) = \lambda v'_1 + (1 - \lambda) v'_1 - 2\gamma \left(\frac{1}{\sqrt{\beta^2 + v_1'^2}} - 1 \right) v_1'^2 \quad (6)$$

对式(6)无量纲位移 v'_1 求导即为机构的无量纲刚度

$$k(v'_1) = \lambda + (1 - \lambda) + 2\gamma \left[1 - \frac{\beta^2}{(\beta^2 + v_1'^2)^{3/2}} \right] \quad (7)$$

在静平衡位置处,正刚度被抵消后剩余刚度为 λ ,由准零刚度原理可得

$$(1 - \lambda) + 2\gamma \left[1 - \frac{\beta^2}{(\beta^2 + v_1'^2)^{3/2}} \right] = 0 \quad (8)$$

将 $v'_1 = 0$ 代入式(8) 可得

$$\gamma = \frac{(1 - \lambda)\beta}{2(1 - \beta)} \quad (9)$$

将式(9)代回式(7)即可得出机构无量纲刚度为

$$k(v'_1) = 1 - (1 - \lambda) \frac{\beta}{1 - \beta} \left[\frac{\beta^2}{(\beta^2 + v_1'^2)^{3/2}} - 1 \right] \quad (10)$$

因此,在静平衡位置处,机构的刚度为

$$K_{QZS} = \lambda K \quad (11)$$

对于式(11),令 $K' = K_{QZS} = \lambda K$,由于 $0 \leq \lambda < 1$,因此,与图 2(a) 所示轻质高刚度“高频”振子相比,通过图 2(c) 所示的机理模型转化,实际高刚度 K 被降低(缩小)成为动态等效低刚度 K' ,其缩小系数为 λ 。

联立式(2)与式(11),可推导出图 2(c) 所示机理模型的动力学方程

$$(l_2/l_1)^2 m \ddot{v}_1 + \lambda K v_1 = 0 \quad (12)$$

将其进一步等效为图 2(b) 所示的动态等效质量为 m' 、动态等效刚度为 K' 的轻质高刚度振子,该振子的动力学方程可表示为

$$m' \ddot{v}_1 + K' v_1 = 0 \quad (13)$$

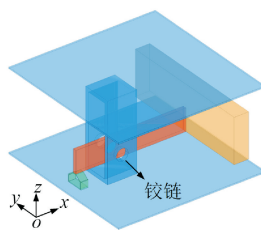
其固有频率为

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K'}{m'}} = \sqrt{\frac{\lambda K}{(l_2/l_1)^2 m}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{l_2/l_1} \sqrt{\frac{K}{m}} \quad (14)$$

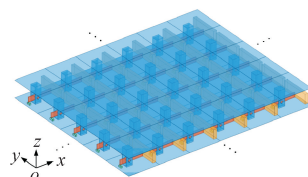
可以看出,图 2(a) 所示的轻质高刚度高频振子,经过图 2(c) 所示的机理模型转化,最终成为图 2(b) 所示的轻质高刚度一体化超低频振子,其固有频率从 $(K/m)^{1/2}$ 降低为 $[\lambda^{1/2}/(l_2/l_1)](K/m)^{1/2}$,降低了 $\lambda^{1/2}/(l_2/l_1)$ 倍。这一过程振子的实际轻质量和高刚度特性并未被改变,因此实现了轻质高刚度结构的超低频特性,为轻质高刚度超结构超低频带隙的设计奠定了基础。

2 轻质高刚度超结构设计模型

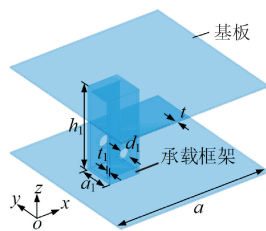
将依据上述方法构造的具有超低频特性的轻质高刚度一体化振子引入夹芯超结构,依此设计出了一种兼具轻质、高刚度承载性的新型超结构——轻质高刚度夹芯超结构板,其结构形成过程见图 3。



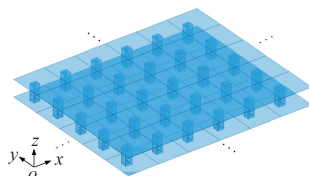
(a) 所提夹芯超结构板单元模型



(b) 夹芯超结构板模型



(c) 夹芯单元模型



(d) 夹芯周期板模型

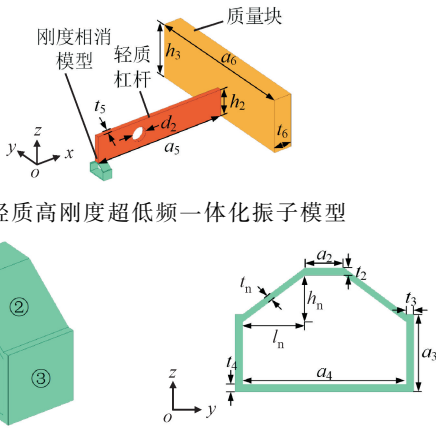


图 3 轻质高刚度夹芯超结构板及其形成原理

Fig. 3 Lightweight and high stiffness sandwich metastructure plate and its formation principle

本文提出的轻质高刚度夹芯超结构板单元由夹芯单元和以铰链嵌入其中的轻质高刚度超低频一体化振子构成,使得轻质高刚度超低频一体化振子绕铰链实现沿 z 方向的上下摆动。

轻质高刚度超低频一体化振子主要由正负刚度相消模型、轻质杠杆和质量块组成,轻质杠杆上设有预留孔以装置铰链,通过摆动实现动态等效质量放大;正负刚度相消模型结构自上而下依次为:①连接件,与杠杆一端相连,用于传递载荷;②负刚度元件,当杠杆端部沿 z 方向压缩时,随压缩量增加发生屈曲变形,呈现力随位移增大而减小的负刚度特性;③正刚度元件,在相同压缩条件下沿外侧发生变形,表现为力随位移增大而增大的正刚度特性,通过与负刚度元件的耦合作用实现动态等效刚度降低;④支撑件,与基板表面连接,用于支撑和传递载荷。各个构件采用粘接或一体成型技术集成。

夹芯单元由上下基板与承载框架构成,承载框架沿高度方向具有较高的刚度,并设有预留孔,用于承载面板载荷和铰接轻质高刚度超低频一体化振子,通过粘接或一体成型技术与上下基板连接。将该夹芯单元沿 x 和 y 方向进行周期性排列,可形成如图 3(d) 所示的夹芯周期板,该结构兼具轻质高刚度特性,为轻质高刚度超结构的设计提供了基体结构。

将轻质高刚度夹芯超结构板单元沿 x 和 y 方向进行周期性排列,获得如图 3(b) 所示的理论上应具有超低频带隙的轻质高刚度夹芯超结构板。

如上所述,由于轻质高刚度夹芯超结构板单元中轻质杠杆的设计,当结构受到外界激励时,轻质杠杆绕铰链产生往复摆动,其两端产生沿 z 方向的竖直位移,这一过程同时实现了动态等效质量放大和因触发

正负刚度相消机制致使的动态等效刚度降低,形成了连贯的力学响应机制,进而避免了传统方法中需施加预位移以实现正负刚度相消的局限性。

以如图 3(a) 所示的轻质高刚度夹芯超结构板单元为研究对象,采用有限元方法对单元的能带结构及其模态位移云图进行计算。计算过程中,沿单元的周期边界方向施加 Bloch 周期性边界条件,其具体数学表达式为

$$u_i(x+a, y+a) = e^{i(k_x a + k_y a)} u_i(x, y), \quad i = x, y, z \quad (15)$$

式中: u 表示位移场; x, y 和 z 为空间位置坐标; k_x 与 k_y 分别表示沿 x, y 方向第一布里渊区内 Bloch 波矢的分量。

如图 4 所示,当波矢沿第一不可约布里渊区边界路径($M-\Gamma-X-M-Y-\Gamma$)进行扫描时,对于每个给定的波矢值,通过求解特征值问题可获得一组特征频率及其对应的特征模态。基于这一计算过程,最终可得到轻质高刚度夹芯超结构的能带结构图以及单元的模式振型。

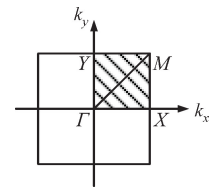


图 4 第一不可约布里渊区

Fig. 4 First irreducible Brillouin zone

为了直观表征夹芯超结构板的超低频振动衰减特性,本文采用有限元方法对有限周期轻质高刚度夹芯超结构的振动传输谱进行计算。该有限结构由 6×5 个夹芯超结构板单元沿 x 和 y 方向排列组成。在有限元软件中,于结构一端沿 z 方向施加加速度激励信号,并在另一端沿 z 方向采集加速度响应信号,有限结构的振动传输谱为

$$T_L = 20 \lg(\alpha_o / \alpha_i) \quad (16)$$

式中: α_i 和 α_o 分别表示激励端、响应端的加速度响应。通过逐步改变激励频率,最终可获得有限周期排列夹芯超结构板的振动传递率。

为验证本文理论分析与数值仿真的准确性,采用 3D 打印技术制备了 3 个周期的轻质高刚度夹芯超结构板试样,并开展了面外振动测试实验,实验装置与样品如图 5 所示。实验过程中,样品通过细软绳自由悬挂以模拟自由边界条件,采用冲击力锤沿板厚方向对样品一端施加激励,同时利用安装在另一端的加速度传感器采集振动响应信号,采集的信

号经由测试系统进行数据处理与分析,最终获得样品的振动传输特性曲线。

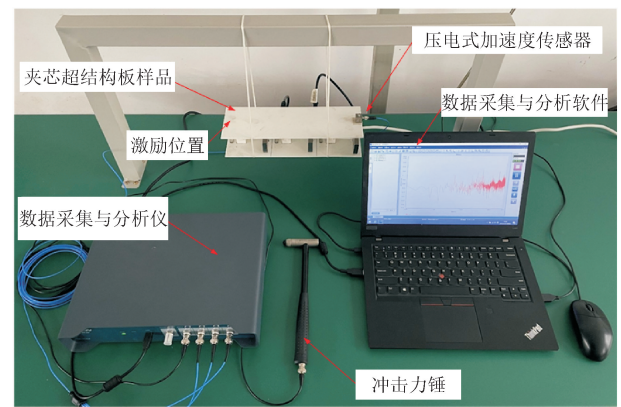


图 5 夹芯超结构板样品及实验测试

Fig. 5 Samples and experimental tests of sandwich metastructural plates

3 带隙特性分析

基于 COMSOL Multiphysics 有限元软件的固体力学模块,采用有限元方法结合 Bloch 周期边界条件,对无限周期轻质高刚度夹芯超结构板的能带结构进行数值计算。

结构尺寸参数为:基板边长(晶格常数) $a=100\text{ mm}$,厚度 $t=1\text{ mm}$;支撑架边长 $a_1=20\text{ mm}$,高度 $h_1=53\text{ mm}$,壁厚 $t_1=2.5\text{ mm}$,预留孔直径 $d_1=8\text{ mm}$;连接件长度 $a_2=2.5\text{ mm}$,厚度 $t_2=0.5\text{ mm}$;负刚度元件跨度 $l_n=4\text{ mm}$,高度 $h_n=3\text{ mm}$,厚度 $t_n=0.4\text{ mm}$;正刚度元件边长 $a_3=5\text{ mm}$,厚度 $t_3=0.5\text{ mm}$;支撑件长度 $a_4=10.5\text{ mm}$,厚度 $t_4=0.5\text{ mm}$;轻质杠杆长度 $a_5=75\text{ mm}$,高度 $h_2=15\text{ mm}$,厚度 $t_5=2.5\text{ mm}$,预留孔直径 $d_2=8\text{ mm}$;质量块长度 $a_6=90\text{ mm}$,高度 $h_3=30\text{ mm}$,厚度 $t_6=10\text{ mm}$ 。结构材料参数如表 1 所示,基板、支撑架及轻质杠杆选用环氧树脂,正负刚度相消模型选用橡胶,而质量块则选用钢。轻质高刚度夹芯超结构板单元无限周期的能带结构如图 6(a)所示。

表 1 结构材料参数

Table 1 Material parameters of the structure

结构(材料)	密度/ ($\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$)	弹性模量/ MPa	泊松比
基板(环氧树脂)	1 180	4 350	0.367 9
轻质杠杆(环氧树脂)	100	4 350	0.367 9
正负刚度相消模型(橡胶)	1 300	50	0.470 0
质量块(钢)	7 850	200 000	0.300 0

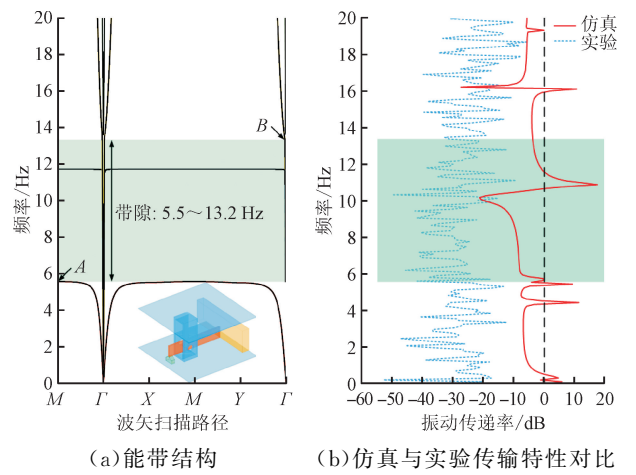


图 6 轻质高刚度夹芯超结构板的能带结构与传输特性

Fig. 6 Band structure and transmission characteristics of lightweight and high stiffness sandwich metastructure plates

分析图 6(a)可知,在 $0\sim20\text{ Hz}$ 频率范围内,能带主要由两类振动模式构成:一类是由结构面外振动形成的面外波能带,另一类是由局域共振模式形成的平直能带。其中,面外振动模式主要来源于夹芯周期板的面外振动特性,如图 6(a)中能带 B 点所示振型即为夹芯周期板面外振动模式。局域共振模式则主要体现为轻质高刚度超低频振子的振动特性,可进一步分为两类:一类是与夹芯周期板振动模式相耦合的局域共振模式,如图 6(a)中能带 A 点所示振型;另一类则是无法与夹芯周期板振动模式耦合的独立局域共振模式。基于模态叠加原理,轻质高刚度夹芯超结构板的主模态由夹芯周期板与轻质高刚度超低频振子的主模态二者耦合形成。在耦合过程中,轻质高刚度超低频振子的主模态通过抑制夹芯周期板的主模态,导致轻质高刚度夹芯超结构板中仅形成能够抑制面外波的面外带隙,如图 6(a)中绿色区域所示。该带隙范围内的夹芯超结构板面外振动模式受到显著抑制,从而实现了对面外波的衰减作用。

为验证所提出轻质高刚度夹芯超结构板的超低频带隙特性,采用有限元方法对图 7 所示两种结构进行对比分析。这两种对比结构与本文结构具有相同的几何尺寸和材料参数,其能带结构对比结果如表 2 所示。可以看出,所提出的轻质高刚度夹芯超结构板带隙打开位置显著降低(较局域共振型降低了 82%,较杠杆放大型降低了 72%),进一步说明基于本文方法所设计的夹芯超结构具有质轻、刚度高和超低频振动带隙特性。

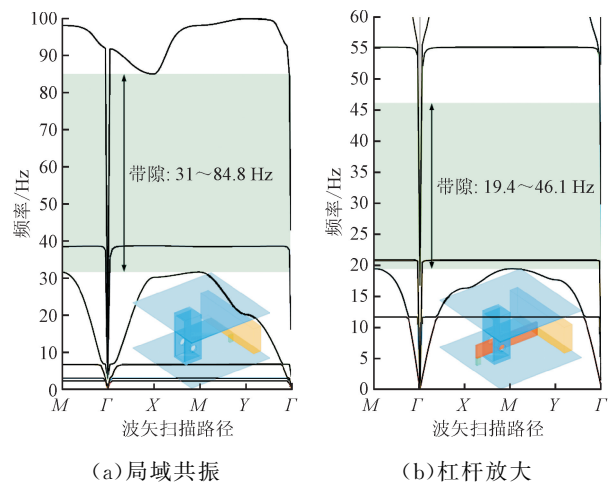


图 7 两种夹芯超结构板能带结构示意图

Fig. 7 Schematic diagram of two types of sandwich metastructure plate band structure

表 2 3 种夹芯超结构板带隙下边界频率的对比	
Table 2 Comparison of bandgap lower boundary frequency of 3 sandwich metastructure plates	
夹芯超结构板类型	带隙下边界频率/Hz
局域共振型	31.0
杠杆放大型	19.4
轻质高刚度	5.5

4 超低频振动带隙形成机理

分别提取了面外带隙上下边界能带对应的轻质高刚度夹芯超结构板单元 B 点和 A 点的振型,结果如图 8 所示。

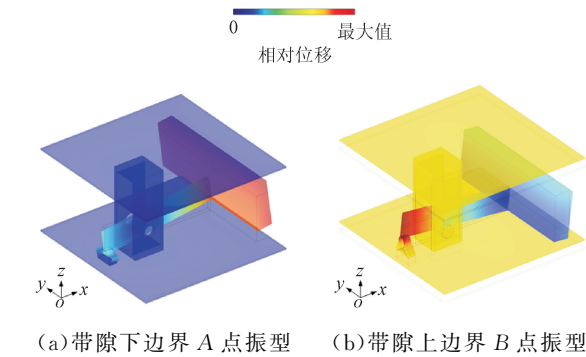


图 8 轻质高刚度夹芯超结构板单元带隙边界特征模态振型

Fig. 8 Characteristic modal vibration patterns of lightweight and high stiffness sandwich metastructure plate units with bandgap boundaries

图 9 所示为振子特征模态振型及质量放大与刚度降低原理图,图 9(d)中黑色实线为模型受载前形状,黑色虚线为模型受载后形状。

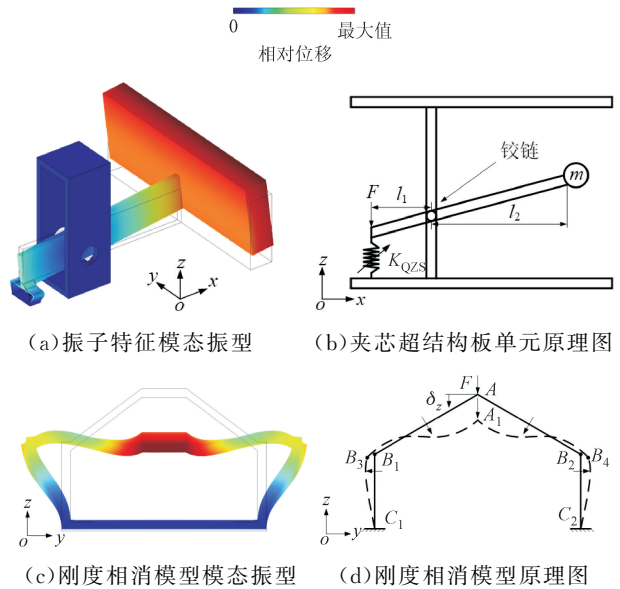


图 9 振子特征模态振型及质量放大与刚度降低原理图

Fig. 9 Oscillator eigenmode mode shapes and schematic diagram of sandwich metastructure plate unit

可以看出,构造的振子作为一个独立机构,具有一种如图 9(a)所示的独特模态振型,对应特征频率为 5.6 Hz,其运动模式原理如图 9(b)所示,杠杆以铰链为中心在竖直面内沿 z 方向上下摆动,其右端撬动小质量 m 使其放大成为动态等效大质量 m' ,左端撬动刚度相消模型触动其正负刚度相消机制,进而将振子主刚度 K 降低为动态等效小刚度 K' ,形成轻质高刚度超低频振子,其对应固有频率为 $[\lambda^{1/2}/(l_2/l_1)](K/m)^{1/2}$;当外界激励接近该固有频率时,该阶模态振型被放大成为振子的主模态,其运动形态如图 8(a)所示,杠杆在 xoz 面内绕支撑框架的铰链沿 z 方向做大幅摆动,其右端撬动小质量 m 运动使其放大成为动态等效大质量 m' ,左端压缩刚度相消模型使负刚度元件(图 3(f)中元件 ②)产生负刚度、正刚度元件(图 3(f)中元件 ③)产生正刚度,形成正负刚度相消效应,进而将振子主刚度 K 降低为动态等效小刚度 K' ,形成轻质高刚度超低频一体化振子,振子的该阶模态与夹芯基板沿 z 方向的模态相耦合,致使基板的运动被抑制,进而无法形成横波传播模式,于是一条以超低频振子固频为开带位置的超低频带隙形成(图 6(a)所示,开带位置为 5.5 Hz)。同时,建立了图 3(f)所示的正负刚度相消模型的理论模型,其原理如图 9(d)所示,当结构受载时,上半部分斜梁向下弯曲,下半部分直梁向结构外侧弯曲,上下梁变形效应的耦合实现了刚度相消,其变形后的模型如图 9(d)中黑色虚线所示。为了进一步说明和验证该机

理,将图 9(a) 所示的振子模态振型中的的刚度相消模型部分在 yoz 面内放大得到其模态振型如图 9(c) 所示,杠杆右端撬动质量块的同时其左端压缩刚度相消模型,致使负刚度元件(图 3(f) 中元件 ②) 向下弯曲,正刚度元件(图 3(f) 中元件 ③) 向结构外侧弯曲,二者弯曲变形的耦合作用实现刚度相消,与理论模型相吻合。

为进一步验证该机理,提取图 6(b) 所示结构传输特性中带隙范围内(5.9 Hz)和带隙范围外(0.6 Hz)的模态振型云图,结果分别如图 10(a)和(b)所示。从图 10(a)可以看出,夹芯周期板基本保持静止状态,而轻质高刚度超低频振子沿 z 方向振动,有效吸收并耗散了激励能量,导致带隙频率范围内的振动在有限超结构板中传播时发生显著衰减;相比之下,图 10(b)显示振动能量分布在整個夹芯超结构板上,结构按其模态振型振动,即振动可按该模式在超结构中进行传播,未能形成带隙。

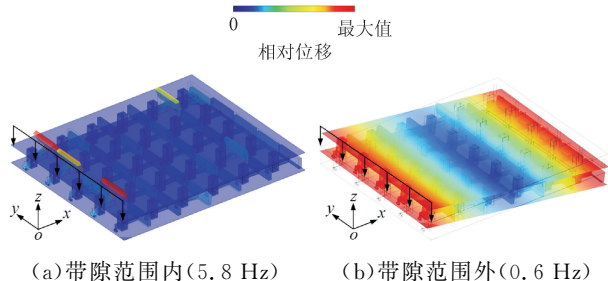


图 10 带隙频率范围内外的面外激励传输过程

Fig. 10 Out-of-plane excitation of transmission processes in and out of the bandgap frequency range

为验证理论分析与数值仿真的准确性,本文还开展了面外振动测试实验,结果如图 6(b) 所示,实验测得的夹芯超结构板频响函数曲线在 0~20 Hz 频率范围内与仿真结果基本吻合,在整个带宽内均表现出显著的振动衰减特性。但由于测试样品中各零部件所采用粘接成型,并且承载框架与轻质杠杆通过铰链相连,铰链作用时由于转动副的存在必然产生摩擦,导致二者结果之间出现了偏差。实验结果表明,本文所提出的轻质高刚度夹芯超结构板具有优异的超低频减振性能,验证了理论模型的正确性和结构设计的有效性。

5 带隙特性及振动传输影响规律

上述分析表明,轻质高刚度超低频一体化振子是决定带隙特性的关键因素,其固有频率直接决定了带隙的起始位置和振动传输特性。为此,本文进一步研究轻质高刚度超低频振子参数对带隙和振动传输特性的影响规律,以期为带隙的精确调控提供理论依据。

5.1 带隙特性影响规律

杠杆臂长比 l_2/l_1 与刚度相消模型中的负刚度元件的高度 h_n 、厚度 t_n 和跨度 l_n 对带隙特性的影响规律如图 11~图 14 所示。

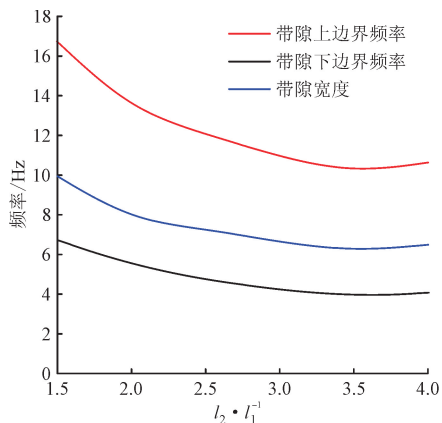


图 11 杠杆臂长比对带隙特性的影响规律

Fig. 11 Influence law of the lever-arm-length ratio on bandgap characteristics

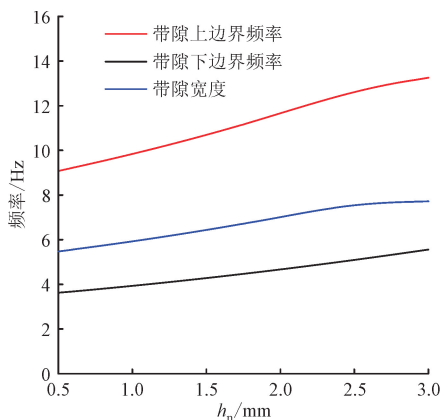


图 12 负刚度元件的高度对带隙特性的影响规律

Fig. 12 Influence law of the height of the negative stiffness element on bandgap characteristics

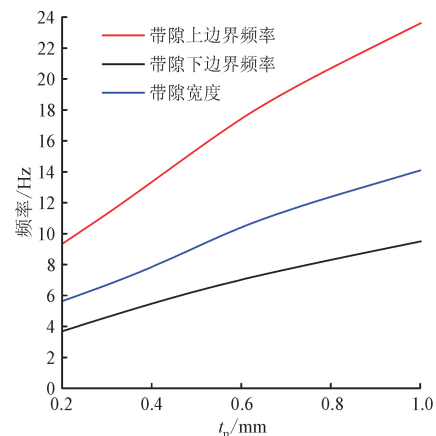


图 13 负刚度元件的厚度对带隙特性的影响规律

Fig. 13 Influence law of the thickness of the negative stiffness element on bandgap characteristics

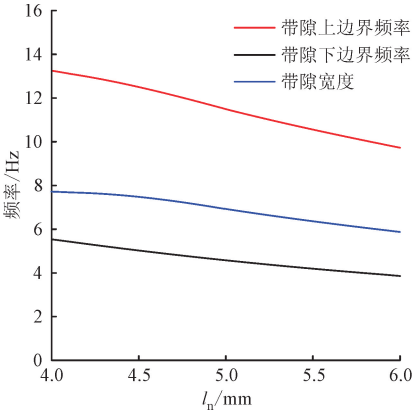


图 14 负刚度元件的跨度对带隙特性的影响规律
Fig. 14 Influence law of the span of the negative stiffness element on bandgap characteristics

图 11 表明,在轻质高刚度一体化振子参数保持恒定的条件下,即 $h_n=3\text{ mm}$ 、 $t_n=0.4\text{ mm}$ 、 $l_n=4\text{ mm}$ 时,随着杠杆臂长比 l_2/l_1 增大,杠杆放大效应增大,进而使得动态等效质量显著增加,导致面外带隙的起始和终止频率向低频方向移动,同时带隙带宽逐渐减小,因此可通过调节轻质高刚度超低频一体化振子中杠杆臂长比 l_2/l_1 来实现目标带隙频率范围的调控。

图 12 和图 13 表明,当 $t_n=0.4\text{ mm}$ 、 $l_n=4\text{ mm}$ 和当 $h_n=3\text{ mm}$ 、 $l_n=4\text{ mm}$,且在杠杆臂长比 $l_2/l_1=2$ 的条件下,随着负刚度元件高度 h_n 与厚度 t_n 的增大,致使刚度相消模型的整体有效刚度增加,导致带隙的起始和终止频率向高频方向移动,同时带隙带宽逐渐增大。

图 14 表明,当 $h_n=3\text{ mm}$ 、 $t_n=0.4\text{ mm}$ 且在相同杠杆臂长比 $l_2/l_1=2$ 条件下,随着负刚度元件跨度 l_n 的增大,刚度相消模型的整体有效刚度降低,使得带隙的起始和终止频率向低频方向移动,且带隙带宽逐渐减小。

以上表明,通过合理调节轻质高刚度超低频一体化振子中杠杆臂长比 l_2/l_1 与负刚度元件的厚度 t_n 、高度 h_n 和跨度 l_n ,可精确调控带隙特性,获取目标带隙。

5.2 振动传输影响规律

杠杆臂长比 l_2/l_1 与刚度相消模型中的负刚度元件的高度 h_n 、厚度 t_n 和跨度 l_n 对振动传输特性的影响规律如图 15~图 18 所示。

图 15 表明,在轻质高刚度一体化振子参数保持恒定的条件下,即 $h_n=3\text{ mm}$ 、 $t_n=0.4\text{ mm}$ 、 $l_n=4\text{ mm}$ 时,随着杠杆臂长比 l_2/l_1 增大,杠杆放大效应

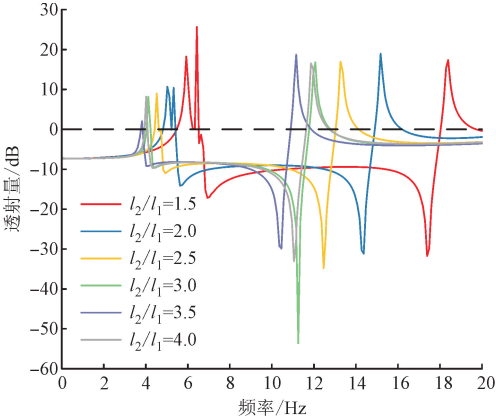


图 15 杠杆臂长比对振动传输特性的影响
Fig. 15 Influence of the lever-arm-length ratio on vibration transmission characteristics

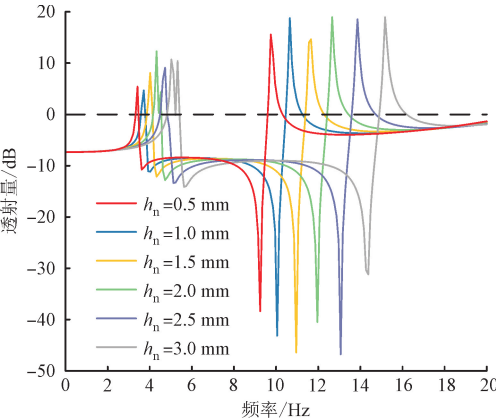


图 16 负刚度元件的高度对振动传输特性的影响
Fig. 16 Influence of the height of the negative stiffness element on vibration transmission characteristics

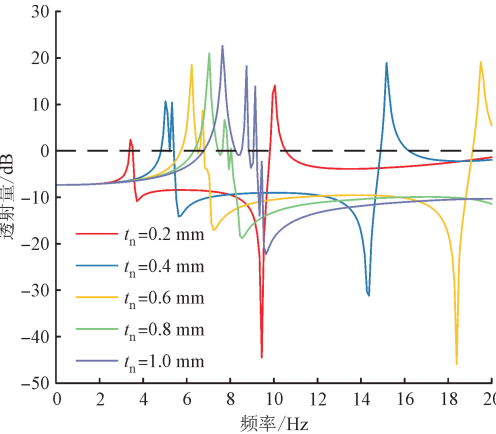


图 17 负刚度元件的厚度对振动传输特性的影响
Fig. 17 Influence of the thickness of the negative stiffness element on vibration transmission characteristics

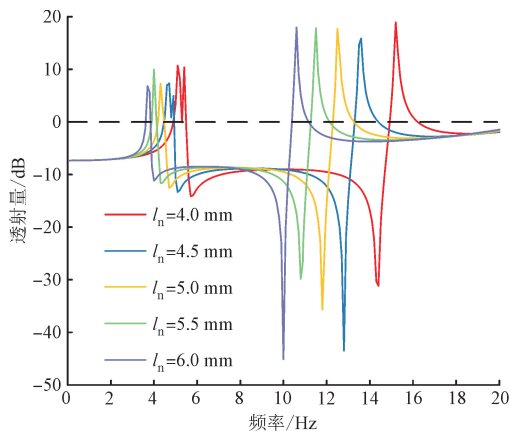


图 18 负刚度元件的跨度对振动传输特性的影响

Fig. 18 Influence of the span of the negative stiffness element on vibration transmission characteristics

增大,动态等效质量显著增加,导致振动传输特性曲线的衰减峰向低频方向移动,并且在带隙打开位置附近的衰减量在逐渐减小;当杠杆臂长比 $l_2/l_1 = 3.0$ 时,其衰减量达到最大值,为 53 dB。

图 16 和图 17 表明,当 $t_n = 0.4$ mm、 $l_n = 4$ mm 和当 $h_n = 3$ mm、 $l_n = 4$ mm,且在杠杆臂长比 $l_2/l_1 = 2$ 的条件下,随着 h_n 与 t_n 的增大,刚度相消模型的整体有效刚度增加,导致振动传输特性曲线的衰减峰向高频方向移动,并且在带隙打开位置附近的衰减量在逐渐增大。

图 18 表明,当 $h_n = 3$ mm、 $t_n = 0.4$ mm 且 $l_2/l_1 = 2$ 条件下,随着负刚度元件跨度 l_n 的增大,刚度相消模型的整体有效刚度降低,导致振动传输特性曲线的衰减峰向低频方向移动,并且在带隙打开位置附近的衰减量在逐渐减小;当负刚度元件跨度 $l_n = 6.0$ mm 时,其衰减量达到最大值,为 45 dB。

可见,通过调节轻质高刚度超低频一体化振子中杠杆臂长比 l_2/l_1 与负刚度元件的厚度 t_n 、高度 h_n 和跨度 l_n 可实现目标带隙频率范围的调控,并且还可增强轻质高刚度夹芯超结构板对振动的衰减能力。

6 结 论

本文提出了基于轻质高刚度超低频振子的轻质高刚度超结构超低频带隙形成机理与方法,并以工程结构中板的轻量化超低频减振为应用目标,构建了一种轻质高刚度夹芯超结构板,通过研究得出如下结论。

(1)提出了一种轻质高刚度振子实现超低频特性的机理模型,经理论推导得出:该振子可在其实际

质量和刚度不变的基础上,通过杠杆放大和刚度相消机制同时实现动态等效质量放大和动态等效刚度降低,使轻质高刚度振子具备超低频特性,将其引入夹芯超结构中可构建具有超低频振动带隙特性的轻质高刚度超结构。

(2)将提出的轻质高刚度超低频一体化振子模型引入夹芯超结构中,设计出了一种轻质高刚度夹芯超结构板,该结构具有超低频带隙特性,相比现有结构,其带隙降低了 72%;实验进一步表明,该新型结构在整个超低频、低频范围内具有良好的振动衰减特性。

(3)轻质高刚度超低频振子的结构参数是影响带隙特性和振动传输特性的主要因素,当调节其负刚度元件的高度 h_n 、厚度 t_n 和跨度 l_n 与杠杆臂长比为 l_2/l_1 时,可实现目标带隙位置和带隙宽度的精确调节,并且还可增强轻质高刚度夹芯超结构板对振动的衰减能力。另外,提出的轻质高刚度超低频振子通过杠杆同时实现了动态质量放大和刚度相消机制引发的动态刚度降低,具有结构功能一体化效果。

本文提出的轻质高刚度超结构超低频带隙设计理论实现了集力学承载和超低频带隙于一体的轻量化超低频减振目标,可为工程实际中各类结构的超低频减振提供理论依据和设计方法。

参考文献:

- [1] 尹剑飞,蔡力,方鑫,等. 力学超材料研究进展与减振降噪应用 [J]. 力学进展, 2022, 52(3): 508-586.
YIN Jianfei, CAI Li, FANG Xin, et al. Review on research progress of mechanical metamaterials and their applications in vibration and noise control [J]. Advances in Mechanics, 2022, 52(3): 508-586.
- [2] 王凯,周加喜,蔡昌琦,等. 低频弹性波超材料的若干进展 [J]. 力学学报, 2022, 54(10): 2678-2694.
WANG Kai, ZHOU Jiayi, CAI Changqi, et al. Review of low-frequency elastic wave metamaterials [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2022, 54(10): 2678-2694.
- [3] 肖勇,王洋,赵宏刚,等. 面向减振降噪应用的声学超材料研究进展 [J]. 机械工程学报, 2023, 59(19): 277-298.
XIAO Yong, WANG Yang, ZHAO Honggang, et al. Research progress of acoustic metamaterials for vibration and noise reduction applications [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2023, 59(19): 277-298.
- [4] JIAO Pengcheng, MUELLER J, RANEY J R, et al. Mechanical metamaterials and beyond [J]. Nature Communications, 2023, 14(1): 6004.

- [5] LIU Zhengyou, ZHANG Xixiang, MAO Yiwei, et al. Locally resonant sonic materials [J]. *Science*, 2000, 289(5485): 1734-1736.
- [6] YILMAZ C, HULBERT G M, KIKUCHI N. Phononic band gaps induced by inertial amplification in periodic media [J]. *Physical Review: B*, 2007, 76(5): 054309.
- [7] YILMAZ C, HULBERT G M. Theory of phononic gaps induced by inertial amplification in finite structures [J]. *Physics Letters: A*, 2010, 374(34): 3576-3584.
- [8] ZENG Yi, CAO Liyun, WAN Sheng, et al. Seismic metamaterials: generating low-frequency bandgaps induced by inertial amplification [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2022, 221: 107224.
- [9] ZENG Yi, CAO Liyun, WAN Sheng, et al. Inertially amplified seismic metamaterial with an ultra-low-frequency bandgap [J]. *Applied Physics Letters*, 2022, 121(8): 081701.
- [10] XI Chenyang, ZHENG Hui, MI Yongzhen, et al. Lever-type inertial amplification plates for low-frequency vibration reduction [J]. *Thin-Walled Structures*, 2023, 192: 111131.
- [11] GAO Lei, MAK C M, CAI Chenzhi. Low-frequency vibration attenuation of metamaterial sandwich plate with lever-type inertial amplified resonators [J]. *Thin-Walled Structures*, 2024, 199: 111827.
- [12] GAO Lei, MAK C M, MA K W, et al. Mechanisms of multi-bandgap inertial amplification applied in metamaterial sandwich plates [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2024, 277: 109424.
- [13] GAO Lei, MAK C M, CAI Chenzhi, et al. Metamaterial sandwich plates with two-degree of freedom inertial amplified resonators for broadband low-frequency vibration attenuation [J]. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2024, 31(30): 12885-12897.
- [14] XU Lanhe, YANG Zhou, ZHANG Zhilin, et al. Lightweight composite meta-lattice structures with inertial amplification design for broadband low-frequency vibration mitigation [J]. *Composites Part B: Engineering*, 2025, 292: 112091.
- [15] LI Ao, BAI Zhuoming, YIN Xu, et al. A tensegrity-inspired inertial amplification metastructure with tunable dynamic characteristics [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2025, 196: 106037.
- [16] CARRELLA A, BRENNAN M J, KOVACIC I, et al. On the force transmissibility of a vibration isolator with quasi-zero-stiffness [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, 322(4/5): 707-717.
- [17] ZHOU Jiaxi, WANG Kai, XU Daolin, et al. Local resonator with high-static-low-dynamic stiffness for lowering band gaps of flexural wave in beams [J]. *Journal of Applied Physics*, 2017, 121(4): 044902.
- [18] ZHOU Jiahao, ZHOU Jiaxi, PAN Hongbin, et al. Multi-layer quasi-zero-stiffness meta-structure for high-efficiency vibration isolation at low frequency [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2024, 45(7): 1189-1208.
- [19] ZHOU Jiaxi, DOU Lingling, WANG Kai, et al. A nonlinear resonator with inertial amplification for very low-frequency flexural wave attenuations in beams [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 96(1): 647-665.
- [20] FAN Haigui, YANG Lijuan, TIAN Yuchen, et al. Design of metastructures with quasi-zero dynamic stiffness for vibration isolation [J]. *Composite Structures*, 2020, 243: 112244.
- [21] CAI Changqi, ZHOU Jiaxi, WANG Kai, et al. Flexural wave attenuation by metamaterial beam with compliant quasi-zero-stiffness resonators [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2022, 174: 109119.
- [22] GUO Zhiwei, XIE Buliang, SHENG Meiping, et al. Tunable ultralow-frequency bandgaps based on locally resonant plate with quasi-zero-stiffness resonators [J]. *Applied Sciences*, 2024, 14(4): 1467.
- [23] JU Xiao, LI Shaoqi, ZHANG Yu, et al. Design of multi-stable metamaterial cell with improved and programmable energy trapping ability based on frame reinforced curved beams [J]. *Thin-Walled Structures*, 2024, 202: 112120.
- [24] LIU Xin, CHEN Shuai, WANG Bing, et al. A compact quasi-zero-stiffness mechanical metamaterial based on truncated conical shells [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2024, 277: 109390.
- [25] 李锁斌, 窦益华, 陈天宁, 等. 局域共振型周期结构振动带隙形成机理 [J]. *西安交通大学学报*, 2019, 53(6): 169-175.
- LI Suobin, DOU Yihua, CHEN Tianning, et al. Formation mechanisms of vibration band gaps in locally resonant periodic structures [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2019, 53(6): 169-175.
- [26] 李锁斌, 魏儒义, 周安安, 等. 超结构夹芯板及其低宽频振动带隙机理 [J]. *西安交通大学学报*, 2021, 55(4): 77-85.
- LI Suobin, WEI Ruyi, ZHOU Anan, et al. A new sandwich type metamaterial plate and its mechanism of low-frequency broad vibration band gap [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2021, 55(4): 77-85.

(编辑 亢列梅)